Colle du 02/04 - Sujet 1
Dimension et séries

Question de cours. Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge puis calculer sa somme totale.

Exercice 2. Soit $A = X^3 - 4X + 2$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}_5[X] \mid A|P \}$.

1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_5[X]$ et déterminer un supplémentaire de F.
2. Même question pour $F_1 = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid A|P \}$ dans $E_1 = \mathbb{R}[X]$.

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 02/04 - Sujet 2
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer la caractérisation par les bases adaptées de la somme directe.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel de dimension 4, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 et 2 respectivement.

1. Donner un encadrement le plus précis possible de $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F+G)$.
2. On pose $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(a, b)$. Déterminer la dimension de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.
3. Déterminer un supplémentaire à $F \cap G$ dans F et un supplémentaire à $F \cap G$ dans G.
4. Déterminer un supplémentaire à F dans $F + G$.

Exercice 2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}$ converge et calculer sa somme totale.

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 02/04 - Sujet 3
Dimension et séries

Question de cours. Théorème de comparaison.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On considère les assertions

A : « F et G sont en somme directe » et B : « $\dim(F) + \dim(G) \leqslant E$. »

Montrer que l'une de ces assertions implique l'autre mais que la réciproque est fausse.

Exercice 2. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. En utilisant la formule $\sin(2a) = \dots$ calculer la somme totale de la série.